CAPÍTULO 8

1. Para cada uma das proposições seguintes refira se se trata ou não de uma hipótese estatística:
   a) $\mu = 3$;
   b) $\bar{x} = 4$;
   c) $P(X < 2.5) = 0.4$;
   d) $2 < \sigma < 3$;
   e) $\bar{X} < 3$.

2. Seja θ a proporção de eleitores que votam "sim" num determinado referendo. Pretende testar-se $H_0 : \theta \leq 0.5$ contra $H_1 : \theta > 0.5$ com base numa amostra de 100 eleitores (admita que todos os votos são expressos em "sim" ou "não"). Seja Y o número de votos "sim" na amostra.
   a) Interprete o significado do teste proposto.
   b) Interprete, para este teste, o significado dos erros de 1.ª e de 2.ª espécie.
   c) Das regiões de rejeição propostas qual parece ser a mais indicada (responda em termos intuitivos)?
      – $W = \{y : y > 35\}$;
      – $W = \{y : y < 45\}$;
      – $W = \{y : y < 65\}$;
      – $W = \{y : y < 25 \vee y > 75\}$;
      – $W = \{y : y > 55\}$.

3. Uma companhia produtora de baterias para *pacemakers* garante que a vida média de cada bateria é de pelo menos três anos. Se a data da operação cirúrgica, para substituição da bateria, se basear na garantia do fabricante, diga como explicaria ao gestor da companhia as consequências dos erros de 1.ª e de 2.ª espécie.

4. Considere uma população de Bernoulli, X, de onde se seleccionou uma amostra casual com duas observações, (x_1, x_2), para testar $H_0 : \theta = 0.3$ contra $H_1 : \theta = 0.4$. Para tal construíram-se os seguintes testes alternativos:
   – Nunca rejeitar H_0;
   – Rejeitar H_0 quando $x_1 + x_2 = 0$;
   – Rejeitar H_0 quando $x_1 + x_2 = 1$;
   – Rejeitar H_0 quando $x_1 + x_2 = 2$;
   – Rejeitar H_0 qualquer que seja o resultado da amostra.
   a) Calcule a dimensão dos diferentes testes propostos.
   b) Calcule as probabilidades associadas ao erro de 2.ª espécie.
   c) Tendo em conta as respostas dadas nas alíneas anteriores, escolha um dos testes propostos.

5. A duração, X, de um certo tipo de componentes, em horas, tem distribuição normal com desvio padrão igual a 50. Para testar $H_0 : \mu = 250$ contra $H_1 : \mu = 200$, utiliza-se a seguinte regra: rejeitar H_0 se $\bar{x} < 230$.

a) Se a decisão for tomada com base numa amostra casual de 16 componentes, calcule a dimensão e a potência associadas a este teste.
b) Qual a dimensão mínima da amostra para que a probabilidade de cometer o erro de 1.ª espécie seja inferior a 0.025?

6. Considere uma população, X, com distribuição exponencial de parâmetro λ da qual se recolheu uma amostra casual $(X_1, X_2, ..., X_{10})$ com o propósito de testar $H_0 : \lambda = 0.5$ contra $H_1 : \lambda = 0.25$. Considere as seguintes regiões de rejeição:
$$W_1 = \left\{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i > 31.5\right\} \text{ e } W_2 = \left\{(x_1, x_2, ..., x_{10}) : \sum_{i=1}^{10} x_i < 10.8\right\}.$$
a) Calcule as probabilidades associadas com os erros de 1.ª e de 2.ª espécie.
b) Perante os resultados da alínea anterior, qual das regiões de rejeição escolheria?
c) Deduza qual o teste mais potente para este caso, e analise a escolha feita na alínea anterior.

7. A duração, em centenas de horas, de uma dada componente electrónica é uma variável aleatória X cuja distribuição é bem aproximada por uma $\mathrm{G}(4, \theta)$. O fabricante garante que o tempo médio de vida é de 8 centenas de horas, mas existem suspeitas de que, dadas as características técnicas da componente, a sua duração média seja de apenas 500 horas. Decidiu-se, assim, recolher uma amostra casual de dimensão 10 e testar $H_0 : \mu = 8$ contra $H_1 : \mu = 5$. Suponha que o referido teste é feito com base na região crítica $\{(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) : \bar{x} < 6.4\}$ e que se observaram os seguintes valores: 4, 8, 5, 6, 8, 9, 6, 7, 3, 4.
a) Parece-lhe que a região de rejeição está adequada ao teste? Responda de forma intuitiva, sem efectuar qualquer cálculo.
b) Qual a probabilidade associada com o erro de 1.ª espécie? E de 2.ª espécie?
c) Sem alterar a dimensão da amostra, como poderia reduzir a probabilidade do erro de 1.ª espécie? Qual a consequência em termos do erro de 2.ª espécie? Exemplifique.
d) Com base na amostra observada, qual a conclusão a tirar?
e) A região crítica dada é a região mais potente?
f) Calcule o valor-*p* associado com a amostra.
g) Se durante um ano o fabricante efectua 100 fornecimentos e cada um destes fornecimentos só não é rejeitado se passar no teste proposto, qual o número esperado de fornecimentos rejeitados, admitindo que a garantia dada é verdadeira?

8. Considere uma variável aleatória X com distribuição dada por
$$f(x \mid \theta) = \theta e^{-\theta x} \quad (x > 0), \text{ para } \theta > 0,$$
da qual se recolheu uma amostra casual de dimensão 10 com o propósito de testar $H_0 : \theta = 1$ contra $H_1 : \theta = 1/2$. Para efectuar este teste foram propostas duas possibilidades:

Teste 1 – Rejeitar H_0 quando $\sum_{i=1}^{10} x_i > 15.705$;

Teste 2 – Rejeitar H_0 quando $\min\{x_i\} > 0.2996$.

Com base nas probabilidades associadas aos diferentes tipos de erro, escolha a alternativa que lhe parece mais adequada.

9. Retome o exercício anterior, e obtenha o teste mais potente de dimensão 0.10 para efectuar o teste proposto. Pode considerar que alguma das alternativas aí propostas corresponde a um teste mais potente? Se sim, qual a dimensão?

10. Seja X uma variável aleatória com função densidade dada por
$$f(x\,|\,\theta)=\frac{1}{\theta}\,x^{-(1+\theta)/\theta}\ \ (x>1)\text{, para }\theta>0.$$
Nota: Admita que $Y=2\ln(X)/\theta$ tem distribuição $\chi^2(2)$.
   a) Obtenha o teste mais potente de dimensão 0.05 para testar $H_0:\theta=2$ contra $H_1:\theta=1$, considerando uma amostra de dimensão 5.
   b) Qual seria a sua decisão se tivesse observado (1.1, 1.3, 1.9, 2.4, 2.7)?

11. O volume de crédito concedido (em milhares de euros) mensalmente em determinada dependência bancária é uma variável aleatória X com função densidade,
$$f(x\,|\,\theta)=\theta^2 x\, e^{-\theta x}\ \ (x>0)\text{, para }\theta>0.$$
   a) Considerando uma amostra de dimensão 5, determine a região crítica mais potente de dimensão 0.01 para testar $H_0:\theta=20$ contra $H_1:\theta=30$.
   b) Nas condições da alínea anterior, refira a região crítica UMP (uniformemente mais potente) para testar $H_0:\theta=20$ contra $H_1:\theta>20$.

12. Considere uma população com função densidade,
$$f(x\,|\,\theta)=\frac{x^{p-1}e^{-x/\theta}}{\theta^p(p-1)!}\ \ (x>0)\text{, para }\theta>0,$$
em que p é um inteiro positivo conhecido, do qual se recolheu uma amostra casual de dimensão n. Obtenha a estatística-teste e a região crítica mais potente para testar $H_0:\theta=1$ contra $H_1:\theta=2$.

13. Seja X uma variável aleatória com função densidade dada por
$$f(x\,|\,\theta)=\frac{1}{2\theta}\,e^{-\frac{|x|}{\theta}}\ \ (x\in\Re)\text{, para }\theta>0.$$
Pretende-se testar $H_0:\theta=1$ contra $H_1:\theta=2$ com base numa amostra de 5 elementos. Admita que $Y=|X|\sim \mathrm{G}(1,1/\theta)$.
   a) Determine a região crítica mais potente de dimensão 0.05 para este teste.
   b) Supondo que se observou $(-1.2, 0.4, 0.9, 1.3, 1.5)$, qual a sua conclusão?
   c) Calcule a probabilidade associada com o erro de 2.ª espécie.
   d) Qual o valor-*p* associado à amostra referida na alínea b)?

14. Um comerciante recebe ovos de um determinado aviário, onde os ovos são classificados, consoante o peso, em duas classes, *A* e *B*. O peso dos ovos da classe *A* tem distribuição normal de média 50 gramas e desvio padrão 6 gramas, enquanto o peso dos ovos da classe *B* tem distribuição normal de média 55 gramas e desvio padrão idêntico ao da classe *A*. O comerciante acaba de receber uma remessa de ovos com

garantia de serem da classe B e tem um prazo de 2 dias para reclamar, caso considere ter havido engano da parte do aviário. Considere $H_0 : \mu = 55$ contra $H_1 : \mu = 50$.

a) Tal como o teste foi definido, pode afirmar-se que o aviário tem o benefício da dúvida?

b) Para tomar uma decisão, o comerciante analisou uma amostra de uma dúzia de ovos cujo peso total foi de 630 gramas. Qual a atitude que o comerciante deve tomar? (utilize a dimensão de 0.05 como referência, e de 0.10 para comparação).

c) Determine a probabilidade do erro de 2.ª espécie. Qual o seu significado?

d) Se pretender que a probabilidade do erro de 2.ª espécie seja idêntica à do de 1.ª espécie (0.05), qual deve ser a dimensão da amostra a considerar?

15. Classifique as afirmações abaixo, verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.

a) Num universo de Poisson a conjectura $\Pr(X = 0) = 0.8$ constitui uma hipótese paramétrica simples.

b) Se rejeitar a hipótese nula num teste de dimensão 10% também rejeita se a dimensão for 5%.

c) Num teste de hipótese simples contra hipótese simples tem-se $P(\text{Rej}\, H_0 \mid H_0) + P(\text{Não Rej}\, H_0 \mid H_1) = 1$.

d) Se um teste de hipótese simples contra hipótese simples tem potência 0.3 isto significa que quando H_1 é verdadeira, a probabilidade de H_0 ser rejeitada é 0.3.

e) O valor observado da estatística associada a um teste de hipóteses só depende dos dados e da hipótese nula e não da hipótese alternativa.

16. Seja X uma variável aleatória que representa a quantidade de vinho existente numa garrafa de 75 centilitros. Admita que X tem distribuição normal com desvio padrão igual a 2. Para testar $H_0 : \mu = 75$ contra $H_1 : \mu < 75$ seleccionou-se uma amostra casual de 10 garrafas, rejeitando-se a hipótese nula se $\bar{x} < 74.1$, onde $\bar{x}$ é a quantidade média de vinho, por garrafa, na amostra observada.

a) Calcule a dimensão deste teste.

b) Determine a função potência, e calcule o seu valor quando $\mu = 74$ e $\mu = 72.5$.

17. Seja θ a proporção de "primeiros serviços" que o João consegue acertar nos seus jogos de ténis. Verificando que $\theta = 0.4$, decidiu voltar a ter lições de ténis de forma a melhorar a sua prestação. Completadas as lições resolveu testar $H_0 : \theta = 0.4$ contra $H_1 : \theta > 0.4$, e estabeleceu como critério que se em 20 "primeiros serviços" acertasse mais de 12 podia afirmar que a sua prestação tinha efectivamente melhorado.

a) Calcule a dimensão associada a este teste. Comente.

b) Construa a função potência, e calcule o seu valor para 0.5, 0.6 e 0.8.

18. Considere que o número de sinistros por ano e por apólice para determinado risco segue uma distribuição de Poisson de parâmetro λ. Com base numa amostra de dimensão 1000 pretende-se testar $H_0 : \lambda = 0.1$ contra $H_1 : \lambda > 0.1$.

a) Obtenha a região crítica UMP de dimensão 0.05 para proceder a este teste.

b) Esboce a função potência associada ao teste UMP, calculando os seus valores para $\lambda = 0.15$, 0.20 e 0.30.

19. O tempo (em meses) que decorre entre duas avarias consecutivas de uma máquina é uma variável aleatória X com distribuição exponencial. Para testar a máquina, colheram-se ao acaso quatro observações que forneceram os seguintes resultados: 2, 3, 2 e 5.
    a) Acha necessário reclamar junto do fornecedor sabendo que a garantia é de o tempo médio entre avarias ser de pelo menos 2 meses? (a dimensão do teste fica ao seu critério).
    b) Esboce a função potência para o teste que utilizou na alínea anterior.

20. Uma urna contém 7 bolas das quais θ são vermelhas, sendo as restantes azuis. Para testar a hipótese $\theta = 2$ contra a alternativa $\theta > 2$, duas bolas são seleccionadas sem reposição, e a hipótese nula é rejeitada se e só se ambas são vermelhas.
    a) Determine a probabilidade de cometer o erro de 1.ª espécie.
    b) Quando $\theta = 3, 4, 5, 6, 7$, determine as probabilidades de cometer o erro de 2.ª espécie.

21. Comente a seguinte afirmação: “Se se rejeita a hipótese nula $H_0 : \mu = \mu_0$ quando a alternativa é bilateral também se rejeitaria H_0 num teste unilateral de idêntica dimensão.”

22. Classifique as afirmações abaixo, verdadeiras ou falsas, justificando sucintamente.
    a) Num teste de dimensão $\alpha = 0.05$, um valor-p de 0.078 leva a não rejeitar H_0.
    b) Quando num teste de hipóteses se obtém um valor-p de 0.05 está-se mais confiante na rejeição de H_0 do que quando o valor-p é 0.01.
    c) Se no teste $H_0 : \mu = \mu_0$ contra $H_0 : \mu < \mu_0$, referente a uma população normal com variância conhecida e média μ, o valor- p é igual a 0.05, então $P(\overline{X} > \overline{x} \mid \mu = \mu_0) = 0.95$.
    d) No teste de uma hipótese estatística o *valor-p* não depende da dimensão do teste.

23. A quantidade de lixo, em toneladas, processada diariamente numa central de reciclagem pode considerar-se uma variável aleatória com distribuição normal. A direcção da central tem como objectivo reciclar uma quantidade média de pelo menos 10 toneladas de lixo por dia. Em 25 dias seleccionados casualmente observou-se, para a quantidade diária de lixo reciclado, uma média de 8.9 e uma variância corrigida de 11.9. Efectuando o teste estatístico adequado, de dimensão 5%, o que pode concluir quanto ao cumprimento do objectivo.

24. Determinado produtor de vinho garante às autoridades de fiscalização que o seu vinho tem um teor médio de acidez que não ultrapassa 0.5 g/l. Supõe-se que o teor de acidez é uma variável aleatória com distribuição normal de parâmetros desconhecidos.
    a) Com base numa amostra de dimensão n, formalize um teste estatístico que permita analisar a veracidade da afirmação do produtor.
    b) Observada uma amostra de 20 garrafas, obteve-se uma média de 0.7 g/l e um desvio padrão corrigido de 0.08. Deverão as autoridades de fiscalização actuar sobre o produtor? Justifique a resposta por meio de um teste adequado.

25. Um auditor supõe que o valor médio das contas a receber numa determinada empresa é de €750. Para suportar o seu raciocínio, propõe-se retirar uma amostra de 36 contas e calcular a sua média. Ele só rejeitará o valor de €750 se este for claramente contrariado pela média da amostra, dando assim o benefício da dúvida ao valor proposto no procedimento a efectuar. Admita que o montante das contas a receber tem distribuição normal com desvio padrão igual a €125.
   a) Defina a região crítica para um teste de dimensão 0.05.
   b) Supondo que na amostra se observou $\bar{x} = 800$ e $s'^2 = 62000$, obtenha o valor-*p*.
   c) Teste se é de pôr em causa, com base na amostra observada, o valor dado para a variância.

26. Um fabricante de automóveis defende que o novo modelo lançado tem um consumo médio que não ultrapassa 9.7 litros aos 100 km em circuito urbano. Suponha que o consumo tem distribuição normal. Recolheu-se uma amostra casual de 10 observações tendo-se obtido: 9.7, 8.6, 12.7, 9.1, 7.6, 12.0, 8.4, 11.2, 10.6 e 8.9.
   a) Teste a veracidade da afirmação do fabricante para $\alpha = 0.01$.
   b) Qual o valor-*p* associado à amostra observada, para o teste formulado em a).
   c) Supondo que $\sigma = 1$, teste a afirmação do fabricante para $\alpha = 0.01$.

27. O tempo de execução de uma determinada tarefa, em minutos, é uma variável aleatória com distribuição normal. Numa amostra casual de 20 realizações dessa tarefa obteve-se para o tempo de execução uma média de 10.8 minutos e uma variância corrigida igual a 7.1.
   a) Com base no teste de hipóteses adequado, utilizando $\alpha = 0.05$, poder-se-á concluir que o tempo médio de realização desta tarefa não excede os 10 minutos?
   b) Admita que a variância da população é conhecida e igual a 8 e que pretende testar $H_0 : \mu = 10$ contra $H_1 : \mu > 10$. Qual deverá ser o número mínimo de tarefas a observar para que, garantindo uma dimensão de 5%, a potência do teste seja 0.995 quando $\mu = 11$.

28. Numa linha de engarrafamento de azeite, a quantidade (em dl) vertida em cada garrafa é uma variável aleatória com distribuição normal. Está garantido que a quantidade média por garrafa é de 10 dl, não sendo de tolerar grandes desvios relativamente a este valor, pois podem originar desperdícios significativos. Assim, considera-se que a máquina está afinada se a variância não ultrapassar 0.5, procedendo-se à sua revisão sempre que numa amostra de 20 garrafas se obtiver $s'^2 \geq 0.8$.
   a) Formalize o problema como um teste de hipóteses. Calcule, justificando, a dimensão do teste associado ao mecanismo de controlo que foi definido.
   b) Se a variância for de 0.66, qual a probabilidade de a máquina não ser afinada? Justifique.

29. Uma fábrica produz determinado material sintético cuja resistência à ruptura é uma variável aleatória de média 250 kg. O processo de produção utilizado é dispendioso e, na tentativa de reduzir custos, está a ser testado um processo mais económico que será adoptado se garantir um nível médio de ruptura não inferior ao anterior. A ad-

ministração da fábrica decidiu recolher uma amostra de 25 unidades fabricadas pelo novo processo e proceder ao teste de $H_0 : \mu \geq 250$ contra $H_1 : \mu < 250$ com uma dimensão 0.025.

a) Dado o teste proposto, parece-lhe que a empresa está mais inclinada a adoptar o novo procedimento ou a manter o antigo?

b) Supondo que na amostra casual se observou uma resistência média do material de 245 kg e um desvio padrão corrigido de 6 kg, e admitindo que a resistência deste material segue uma distribuição normal, calcule o valor-*p* associado ao teste e conclua sobre a adopção ou não do novo processo de fabrico.

30. Tem havido várias queixas dos utentes de um hospital quanto ao elevado atraso, relativamente à hora marcada, na realização de exames de diagnóstico cardiovascular. Para melhorar a qualidade do serviço prestado foram tomadas algumas medidas fixando-se como objectivo reduzir para um máximo de 20 minutos o tempo médio de atraso. Para uma amostra casual de 25 pacientes atendidos após a aplicação dessas medidas, foram registados os atrasos verificados e obteve-se uma média de 22.11 minutos e um desvio padrão corrigido de 6.1. Admitindo que os tempos de atraso seguem distribuição normal diga, efectuando o teste de hipóteses adequado, o que pode concluir sobre o sucesso das medidas tomadas (dimensão 0.05).

31. Uma repartição de Finanças tem dois funcionários a receber declarações de IRS. Admita que o tempo que cada funcionário leva a atender uma pessoa tem distribuição normal, com desvios padrões iguais a 2 minutos. O Sr. Antunes, ao chegar para entregar a sua declaração, nota que a fila junto ao balcão *A* tem 20 pessoas, enquanto a fila junto ao balcão *B* tem 15 pessoas, e opta, naturalmente, por esta. Ao começar a ser atendido (um hora e quinze minutos depois) repara que a vigésima pessoa da fila ao lado tinha justamente acabado de ser atendida. Pode afirmar-se que o tempo médio gasto pelos dois funcionários a atender uma pessoa é idêntico? (Considere as dimensões 0.05 e 0.1).

32. Para avaliar a qualidade do ambiente nas duas maiores cidades portuguesas, consideram-se duas variáveis aleatórias, *X* e *Y*, que representam o número de partículas em suspensão no ar (microgramas por m^3) em Lisboa e no Porto, respectivamente (quanto mais partículas em suspensão, pior a qualidade do ar). Suponha que as duas variáveis aleatórias têm distribuição normal. O Ministério do Ambiente mandou recolher duas amostras casuais: uma de dimensão 16 na avenida da Liberdade em Lisboa; outra, de dimensão 13, na avenida dos Aliados no Porto. Os resultados observados são os seguintes: $\bar{x} = 92.9$, $s'_X = 25.4$, $\bar{y} = 86.1$, $s'_Y = 28.1$.

a) Com base num teste estatístico adequado, para $\alpha = 0.05$, mostre que não se rejeita a igualdade de variâncias das duas variáveis aleatórias.

b) Supondo variâncias iguais em Lisboa e no Porto, qual o valor-*p* do teste estatístico adequado para avaliar se a qualidade do ar é pior no centro de Lisboa do que no centro do Porto?

33. A empresa de cigarros Fumarada, SA envia para um laboratório amostras de tabaco tratado por dois processos diferentes. Os resultados das cinco medições do conteúdo de nicotina por mg por cada processo foram:
 (i) 24 27 26 21 24;
 (ii) 27 28 23 31 26.
 Suponha que o conteúdo de nicotina por mg segue uma distribuição normal.
 a) Considerando a igualdade entre variâncias, é de admitir idêntico teor médio de nicotina para cada processo?
 b) E caso não se admita a igualdade entre variâncias?
 c) É de admitir que as variâncias são iguais nos dois processos de tratamento?

34. Dois programas de alimentação de gado bovino são comparados. A variável aleatória *X* representa o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 1, durante um mês, enquanto *Y* traduz o aumento de peso (em kg) de um animal alimentado segundo o programa 2, durante igual período de tempo. Sabe-se que $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ e $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, e que as variáveis são independentes.
 Um grupo de 8 animais foi submetido ao primeiro programa durante um mês, tendo-se obtido
$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 416 \text{ e } \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 21807.$$
 Outro grupo de 10 animais foi submetido ao segundo programa durante um mês, tendo-se obtido
$$\sum_{i=1}^{10} y_i = 468 \text{ e } \sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 22172.$$
 a) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre as variâncias.
 b) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias iguais.
 c) Teste, ao nível de 0.05, a igualdade entre os valores médios supondo variâncias diferentes.
 d) Qual dos procedimentos adoptados nas alíneas anteriores, para testar a igualdade de médias, lhe parece mais adequado?

35. Uma empresa pretende adquirir um equipamento de embalagem. Existem no mercado dois processos, *A* e *B*, que garantem o mesmo peso médio da embalagem. O processo *A* é mais rápido mas parece dar origem a uma maior oscilação nos pesos das embalagens. Recolhidas duas amostras casuais, ambas de dimensão 31, uma de cada um dos processos, observou-se um desvio padrão corrigido de 65 gramas para o processo *A* e de 50 gramas para o processo *B*. Admitindo que o peso das embalagens tem distribuição normal, qual o seu comentário à afirmação: "O processo *A* é preferível dado que os dois processos conduzem a uma idêntica variância do peso das embalagens".

36. Levou-se a efeito um estudo de uma amostra casual de 25 famílias com o objectivo de determinar qual a reacção dos consumidores a uma série de medidas inseridas numa campanha de poupança energética. Foram noticiados e praticados descontos para certos níveis de redução dos consumos. Observaram-se os consumos energéticos das

famílias seleccionadas durante dois meses, um antes e outro depois da campanha, X_1 e X_2 respectivamente, e calculou-se a partir dos registos, para cada família, a diferença dos consumos ($D = X_1 - X_2$) tendo-se obtido uma diferença média de 0.2 kWh e um desvio padrão corrigido (s'_D) de 1 kWh. Suponha que a quantidade de energia consumida mensalmente por uma familia segue uma distribuição normal.

a) Com dimensão de 0.05, que se pode afirmar sobre o êxito da campanha?

b) Se os valores reportados, diferença média de 0.2 kWh e desvio padrão corrigido (s'_D) de 1 kWh, se referissem a uma amostra de 225 famílias, que pode afirmar sobre o êxito da campanha? Comente.

37. A reitoria de uma universidade decidiu publicar os resultados dos inquéritos anuais de avaliação pedagógica de todos os professores. Escolhidos ao acaso 10 docentes, recolheram-se as pontuações obtidas antes e depois da decisão de publicação:

(3.4, 3.6), (4.2, 4.0), (3.2, 3.4), (2.5, 3.1), (4.2, 4.4),
(2.9, 3.1), (2.7, 2.5), (3.5, 3.6), (2.6, 2.8), (3.1, 3.0).

Admitindo que a classificação (numa escala de 0 a 5) tem distribuição normal, pode concluir-se que a decisão de publicar os resultados dos inquéritos melhorou as pontuações dos docentes? (suponha que a dimensão do teste é 0.05).

38. Num ginásio de manutenção decidiu-se avaliar o efeito das férias de Verão sobre o peso dos seus frequentadores. Assim, seleccionou-se uma amostra casual de 25 pessoas de ambos os sexos que foram pesadas antes de férias (PJul) e depois de férias (PSet). Com base nos dados obtidos realizou-se o teste estatístico cujos resultados se encontram no seguinte *output* de um programa informático de estatística:

t-Test: Paired Two Sample for Means

	Pset	Pjul
Mean	66.2969261	65.340501
Variance	72.4458373	76.478126
Observations	25	25
Pearson Correlation	0.9016143	
Hypothesized Mean Difference	0	
Df	24	
t Stat	1.24722365	
P(T<=t) one-tail	0.11217485	
t Critical one-tail	1.71088232	
P(T<=t) two-tail	0.22434970	
t Critical two-tail	2.06389814	

Comente a adequabilidade do teste efectuado, e diga quais as conclusões que o teste permite tirar.

39. Numa empresa de aluguer de veículos o parâmetro fundamental para estabelecer a tarifa diária de aluguer dos veículos ligeiros de passageiros, na categoria de quilometragem ilimitada, é o número médio de quilómetros percorridos diariamente que, na tarifa actualmente praticada, se pressupõe não ultrapassar 275. Para avaliar se é necessário rever essa tarifa recolheu-se uma amostra casual de 500 alugueres

nesta categoria, tendo-se observado uma média de 278.5 e uma variância corrigida de 6430.5. Recorra a um teste de hipóteses de dimensão $\alpha = 0.05$ para avaliar se é de proceder à revisão da tarifa diária deste tipo de aluguer.

40. Num debate sobre desburocratização, ao discutir o tempo necessário para a obtenção de determinado documento, *X*, o director do serviço afirmou que o tempo médio de espera é de 15 dias, o que foi de imediato contestado por um utente que afirmou ser muito superior. Observada uma amostra casual de 625 pedidos já satisfeitos, registou-se um tempo médio de 16.7 dias com um desvio padrão de 6.4 dias.
    a) É defensável a afirmação do director do serviço? Responda a esta pergunta fazendo o teste adequado com dimensão 0.05.
    b) Calcule, aproximadamente, a dimensão associada à seguinte regra de decisão: "se $\bar{x} > 15.6$ o director do serviços não tem razão".

41. A empresa "Inbox4All" disponibiliza um serviço de correio electrónico para os seus clientes. Grande parte das reclamações recebidas na empresa relaciona-se com o tempo de espera até conseguir abrir a caixa de correio. Para estudar esta questão observou-se um conjunto de 225 ligações escolhidas aleatoriamente, tendo-se obtido um tempo médio de 22.5 segundos e um desvio padrão de 10.3.
    A empresa pode afirmar que o tempo médio de espera não ultrapassa os 20 segundos? Responda a esta pergunta fazendo o teste adequado com dimensão 0.05.

42. Um investigador interessado no estudo das discriminações salariais entre homens e mulheres nas empresas de auditoria de certo país, recolheu duas amostras aleatórias (uma referente a homens, e outra, a mulheres) de auditores no seu primeiro ano de trabalho, que forneceram os seguintes resultados:

Amostra	**Rendimento médio anual**	**Desvio padrão**	**Dimensão da amostra**
Mulheres	€ 43 217	12 560	125
Homens	€ 47 121	17 654	100

    Teste, com $\alpha = 0.05$, a hipótese de que não existe discriminação salarial.

43. Num inquérito por amostragem realizado junto dos residentes nos concelhos da Área Metropolitana de Lisboa obtiveram-se observações sobre os tempos diários gastos nas deslocações casa-trabalho. Os dados referentes aos residentes nos concelhos de Cascais e Barreiro são os seguintes:

	Cascais	**Barreiro**
Número de residentes inquiridos	360	450
Tempo médio por deslocação (em minutos)	35	44
Variância do tempo gasto por deslocação	816	1202

    Pode afirmar-se, a um nível de 0.05, que o tempo médio gasto por deslocação é semelhante para os residentes dos dois concelhos?

44. A existência de outros fornecedores de acessos à *Internet* tem obrigado a empresa @WEB a uma política comercial mais agressiva, preocupando-se de forma notória

com o grau de satisfação dos seus clientes. Nesse sentido, estabeleceu como referência o mínimo de 90% de clientes satisfeitos.

a) Se se estabelecer como critério que não se cumpre aquele objectivo se numa amostra de 100 clientes mais de 14 se mostrarem insatisfeitos, calcule, através da formulação adequada de um teste de hipóteses, a dimensão associada a esta região crítica.
b) Construa a função potência do teste, e calcule o seu valor se a proporção de clientes insatisfeitos for 0.15. Interprete o resultado.

45. A empresa "Trapos & Companhia" garante que pelo menos 95% das peças de fazenda que produz não têm defeito. De um grande fornecimento recebido por um armazém, foram seleccionadas 100 peças de fazenda, tendo-se apurado que sete delas apresentavam defeitos.
    a) Pode pôr-se em causa a garantia da empresa? Justifique com base no teste de hipóteses adequado.
    b) Qual a potência do teste efectuado na alínea anterior se a verdadeira proporção de peças defeituosas for de 0.1?
    c) Se se rejeitar a garantia da empresa sempre que numa amostra de 10 peças de fazenda se observar mais de uma defeituosa, calcule a probabilidade de cometer um erro de primeira espécie.

46. Um fornecedor de telemóveis da empresa de telecomunicações TELNET garante que a percentagem de aparelhos com defeito nos seus fornecimentos é no máximo de 2%. Para avaliar o cumprimento dessa garantia o departamento de controlo de qualidade tem o seguinte procedimento: em cada lote fornecido observa uma amostra casual simples de 500 telemóveis, rejeitando o lote se encontrar mais de 14 telemóveis defeituosos.
    a) Determine α, dimensão do teste.
    b) Calcule qual a probabilidade de cometer um erro de 2ª espécie, num lote com 4% de aparelhos defeituosos.

47. Uma estação de televisão fixou como objectivo ter no horário nobre uma audiência de pelo menos 55% de telespectadores.
    a) Foi realizado um inquérito telefónico, dentro desse horário, a uma amostra casual de 100 pessoas, tendo 51 dos inquiridos declarado estar a ver a estação televisiva em questão. Proponha o teste de hipóteses mais adequado, e com base no valor-*p* diga se pode afirmar que o objectivo proposto não foi cumprido?
    b) Consultada uma empresa de estudos de mercado ficou estabelecido que semanalmente a empresa interrogaria, por telefone e dentro desse horário, uma amostra casual de 200 telespectadores, considerando-se que o objectivo não é atingido se o número de respostas positivas for menor ou igual a 92. Com esta metodologia qual o valor máximo para a percentagem semanas em que se afirma indevidamente que o objectivo não é alcançado.

48. O Ministério das Finanças está interessado em averiguar se a proporção de declarações de IRS enviadas pela *Internet* com erros de preenchimento é menor do que aquela que se verifica nas declarações entregues nos balcões das repartições de Finanças. Uma amostra de 500 declarações enviadas pela *Internet* evidenciou que 125 continham erros de preenchimento, enquanto uma amostra de 450 declarações entregues nos balcões revelou 128 mal preenchidas. Efectue o teste adequado e interprete o resultado obtido.

49. Antes do último "pacote de medidas", a popularidade do partido no poder em determinada região era de 52%, de acordo com um inquérito por amostragem a 300 pessoas aí residentes. Uma sondagem mais recente, abrangendo uma amostra casual de 400 residentes dessa região, revelou uma queda de 5 pontos percentuais na popularidade. Pode-se considerar-se estatisticamente significativa essa quebra?

50. Numa determinada estrada nacional registaram-se 170 acidentes durante os últimos 2 anos (104 semanas). Admitindo que o número de acidentes ocorridos por semana segue um processo de Poisson de taxa λ, poder-se-á afirmar, com uma dimensão 0.05, que o número médio de acidentes por semana nessa estrada é de pelo menos 2.

51. O gerente de uma agência turística defende perante a administração da sua empresa que o maior movimento dos meses de Verão justifica um acréscimo de pessoal superior ao programado. Suponha que, de acordo com os padrões da empresa, o número de empregados já contratados é suficiente para atender um número médio diário de 50 clientes e que nos dois primeiros meses de Verão (60 dias de trabalho) foi atendida uma média de 51.8 clientes/dia com uma variância corrigida de 55.
    a) Tendo sido contratado para avaliar se é necessário contratar mais pessoal, formule um teste adequado (dimensão 0.05) e tire conclusões.
    b) Critique sinteticamente as hipóteses que teve de admitir na alínea anterior.
    c) Teria a sua conclusão sido diferente se soubesse que o número de clientes/dia segue uma distribuição de Poisson?

52. Na política de cobranças de uma empresa, definida no início do ano, fixou-se um prazo médio de recebimentos de 60 dias. Com base numa amostra casual de 45 facturas apurou-se um tempo médio de recebimentos de 85 dias e uma variância amostral corrigida de 670. Para aferir se são de tomar medidas de correcção, definiu-se o teste de hipóteses seguinte: $H_0 : \mu = 60$ contra $H_1 : \mu > 60$. Qual a sua conclusão? (dimensão 0.10).

53. Construa um quadro-resumo para efectuar testes de hipóteses para grandes amostras de populações de Poisson.

54. Um analista financeiro pretende testar se as rentabilidades de dois activos financeiros (*X* e *Y*, respectivamente) podem ser consideradas não correlacionadas. Suponha que estas rentabilidades seguem uma distribuição normal, e que se observou uma amostra de dimensão 50 a partir da qual se obteve:

$$\bar{x} = 0.800,\ s_X^2 = 0.483,\ \bar{y} = 0.386,\ s_Y^2 = 0.194,\ r_{XY} = 0.234.$$

Formalize um teste adequado e tire as respectivas conclusões, tendo em conta a amostra observada.

55. Um agricultor vai estimar a produção total de laranjas do seu pomar a partir do seu "palpite" sobre o peso da fruta de cada uma das laranjeiras, mas deve utilizar essa estimativa só se existir uma correlação positiva entre o "palpite" (X) e o peso real (Y). Colheram-se e pesaram-se os frutos de uma amostra casual de 25 laranjeiras desse pomar registando-se para cada árvore o peso real (y_i) e o "peso-palpite" do agricultor (x_i). Os resultados obtidos foram os seguintes:

$$\sum_{i=1}^{25} y_i = 660;\ \sum_{i=1}^{25} y_i^2 = 18200;\ \sum_{i=1}^{25} y_i x_i = 18950;$$

$$\sum_{i=1}^{25} x_i = 700;\ \sum_{i=1}^{25} x_i^2 = 19994.$$

a) Admitindo que X e Y têm distribuição normal, diga, supondo uma dimensão do teste de 0.05, se é de utilizar aquela estimativa.
b) Como é natural, a qualidade do estimador será tanto melhor quanto maior for a correlação entre X e Y. Teste, ao nível de 0.05, a hipótese de que o coeficiente de correlação é maior ou igual a 0.9.

56. No quadro seguinte encontram-se as correlações empíricas entre 3 variáveis (*licenças* de construção, *taxa* de juro e consumo de *cimento*) obtidas a partir de 20 observações trimestrais. Admitindo que essas observações têm distribuição normal, diga quais as variáveis que se podem considerar correlacionadas entre si (dimensão 0.05 e 0.1).

	licenças	*taxa*	*Cimento*
licenças	1		
Taxa	–0.70724	1	
cimento	0.33093	0.02729	1

57. Um grupo de alunos aleatoriamente escolhidos realiza dois exames (de dificuldade considerada semelhante) sem consulta (situação A) e com consulta (situação B). Com os resultados obtidos efectuou-se um teste estatístico cujo *output* é o seguinte:

t-Test: Paired Two Sample for Means

	A	B
Mean	10.875	11.59722
Variance	15.06066	11.40543
Observations	18	18
Pearson Correlation	0.849814	
Hypothesized Mean Difference	0	
Df	17	
t Stat	–1.49686	
P(T<=t) one-tail	0.076383	
t Critical one-tail	1.739606	
P(T<=t) two-tail	0.152765	
t Critical two-tail	2.109819	

a) A diferença de médias obtida permite concluir que, em geral, a média é superior nos exames com consulta? Justifique, referindo as hipóteses subjacentes ao teste, e considerando dimensões de 0.05 e 0.1.

b) No mesmo quadro considere a informação relativa ao valor obtido para o coeficiente de correlação de Pearson. Pode concluir-se que, na população, existe correlação positiva entre os resultados nos dois tipos de exames? Justifique a resposta por meio um teste estatístico, e diga se a sua conclusão coincide com o resultado, *a priori*, esperado.

58. Numa amostra recolhida junto dos alunos do 1.º ano de três universidades diferentes, relativamente às suas idades, obtiveram-se os seguintes valores:

Universidades		
A	***B***	***C***
17	16	21
19	16	23
20	19	22
21		20
18		19

Teste a hipótese de que a média das idades dos alunos do 1.º ano é a mesma nas diferentes universidades.

59. Dispondo de dados amostrais relativos aos tempos de execução de uma mesma tarefa em quatro situações diferentes (*A*, *B*, *C*, *D*) realizou-se o teste estatístico cujos resultados se apresentam no quadro seguinte:

Anova: Single Factor

SUMMARY

Groups	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
A	10	100.9297	10.09297	6.68121480
B	8	77.5579	9.69474	5.04241582
C	7	75.3397	10.76282	4.56617742
D	5	58.5088	11.70177	1.63668578

ANOVA

Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
Between Groups	14.31248	3	4.770827	0.958799719	0.426917	2.975156
Within Groups	129.3717	26	4.975833			
Total	143.6841	29				

a) Diga quais os objectivos do teste, e explicite em que condições (pressupostos) são válidas as conclusões estatísticas do teste efectuado.

b) Admitindo que as condições anteriores se verificam, quais as conclusões do teste efectuado? Justifique.

60. Em certo país, três marcas (*A*, *B* e *C*) disputam o segmento de mercado dos veículos utilitários a gasolina. Com o intuito de testar se o consumo de gasolina é o mesmo para as três marcas, observou-se, para cada uma delas, o consumo registado em cinco veículos semelhantes de cada uma das marcas. Os resultados obtidos constam do quadro que se segue e referem-se a litros por 100 km num determinado circuito urbano.

Marcas		
A	***B***	***C***

12.2	11.9	13.5
10.0	10.9	11.1
10.6	11.1	10.8
11.1	11.2	11.9
10.6	10.5	11.4

Qual a conclusão que pode tirar? Refira as principais hipóteses que teve de admitir para poder efectuar este teste.

61. Pretende-se comparar a rentabilidade média das empresas de 4 sectores industriais (X,Y,W,Z). A análise estatística efectuada proporcionou os seguintes resultados:

Anova: Single-Factor

Summary

Groups	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
X	9	94	10.444	21.277
Y	8	88	11.000	30.285
W	10	94	9.400	10.044
Z	6	73	12.166	20.166

ANOVA

Source of Variation	*SS*	*Df*	*MS*	*F*	*P-value*	*F crit*
Between Groups	30.605	3	10.201	0.5159	0.6745	2.9340
Within Groups	573.45	29	19.774			

a) A rentabilidade média pode considerar-se igual nos 4 sectores? Justifique. Refira as principais hipóteses que teve de admitir para poder efectuar esta análise.

b) Admitindo normalidade, pode considerar-se iguais as variâncias das rentabilidades dos sectores Y e W? Justifique.

62. Os dados seguintes representam o número de unidades produzidas por dia por quatro máquinas diferentes (B1, B2, B3 e B4), quando utilizadas por cada um dos quatro operadores (Al, A2, A3 e A4):

	Operadores			
Máquina	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**
B1	15	14	19	18
B2	17	12	20	16
B3	16	18	16	17
B4	16	16	15	15

Que pode concluir quanto à influência dos operadores na produção, e à influência do tipo de máquina utilizada? (utilize a dimensão 0.05).

63. Com o objectivo de avaliar a eficiência energética de diferentes marcas de desumidificadores, observou-se o consumo mensal (em kWh) de cinco marcas submetidas a quatro níveis de humidade crescente. A análise estatística efectuada conduziu aos seguintes resultados:

Anova: Two-Factor Without Replication

SUMMARY	*Count*	*Sum*	*Average*	*Variance*
1	4	264	66	62
2	4	282	70.5	73
3	4	277	69.25	62.25
4	4	307	76.75	36.9167
5	4	313	78.25	48.9167
1	5	314	62.8	41.7
2	5	351	70.2	25.2
3	5	378	75.6	23.3
4	5	400	80	23.5

ANOVA

Source of Variation	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*P-value*
Marca	429.30	4	107.325	50.506	2.07027E-07
Humidade	823.75	3	274.583	129.216	2.12139E-09
Error	25.50	12	2.125		
Total	1278.55	19			

Faça a análise dos resultados obtidos.

64. Os dados seguintes representam a produção de trigo obtida com três variedades diferentes de sementes (A, B e C) e duas variedades de fertilizantes (F1 e F2):

	A	B	C
F1	8	3	7
F2	10	4	8

Que conclusões se podem tirar relativamente à influência do tipo de sementes e de fertilizantes utilizados na produção de trigo (dimensão de 0.01)?

SOLUÇÕES DE EXERCÍCIOS

CAPÍTULO 8

1. a) sim; b) não; c) sim; d) sim; e) não.
4. a) 0, 0.49, 0.42, 0.09, 1; b) 1, 0.64, 0.52, 0.84, 0; c) quarto teste.
5. a) 0.0548, 0.9918; b) 25.
6. a) W_1: 0.0489, 0.2680; W_2: 0.0488, 0.9995; b) W_1;
   c) $\Sigma_{i=1}^{n} x_i > a$, para uma dimensão de 5% é W_1.
7. a) sim; b) 0.0956, 0.0465; d) rejeitar; e) sim; f) 0.0463; g) 9.56.
8. Teste 1: 0.05, 0.2653; teste 2: 0.05, 0.7764.
9. $\Sigma_{i=1}^{n} x_i > 14.206$, 0.05.
10. a) $\Sigma_{i=1}^{n} \ln(x_i) < 3.9403$; b) rejeitar.
11. a) $\Sigma_{i=1}^{n} x_i < 0.2065$; b) $\Sigma_{i=1}^{n} x_i < 0.2065$.
12. $\Sigma_{i=1}^{n} X_i$, $\Sigma_{i=1}^{n} x_i > k$.
13. a) $\Sigma_{i=1}^{n} | x_i | > 9.1535$; b) não rejeitar; c) 0.4824; d) 0.3895.
14. a) sim; b) $z_{\text{obs}} = -1.4434$; c) 0.1075, 0.0548; d) 16.
15. a) V; b) V; c) F; d) V; e) V.
16. a) 0.0774; b) 0.5628, 0.9943.
17. a) 0.0210; b) 0.1316, 0.4159, 0.9679.
18. a) $\Sigma_{i=1}^{n} x_i > 116.45$ ou $\bar{x} > 1.1645$; b) 0.9969, 1, 1.
19. a) $q_{\text{obs}} = 12$, não reclamar.
20. a) 1/21 (0.0476);
    b) 18/21 (0.8571), 15/21 (0.7143), 11/21 (0.5238), 6/21 (0.2857), 0.
22. a) V; b) F; c) V; d) V.
23. $t_{\text{obs}} = -1.594$.
24. b) $t_{\text{obs}} = 11.180$.
25. a) $\bar{x} < 709.17 \vee \bar{x} > 790.83$; b) 0.0164; c) $q_{\text{obs}} = 138.88$.
26. a) $t_{\text{obs}} = 0.339$; b) 0.3711; c) $z_{\text{obs}} = 0.569$.
27. a) $t_{\text{obs}} = 1.51$; b) 143.
28. a) 0.0469; b) 0.7640.
29. b) $t_{\text{obs}} = -4.1667$, valor-p = 0.000173.
30. $t_{\text{obs}} = 1.730$.
31. $z_{\text{obs}} = -1.830$.
32. a) $F_{\text{obs}} = 0.8171$; b) $t_{\text{obs}} = 0.6838$, valor-p = 0.25.
33. a) $t_{\text{obs}} = -1.565$; b) $t_{\text{obs}} = -1.565$; c) $F_{\text{obs}} = 1.8298$.
34. a) $F_{\text{obs}} = 0.8346$; b) $t_{\text{obs}} = 2.0796$; c) $t_{\text{obs}} = 2.10$.
35. $F_{\text{obs}} = 1.69$.
36. a) $t_{\text{obs}} = 1$; b) $t_{\text{obs}} = 3$.
37. $t_{\text{obs}} = -1.585$.
39. $t_{\text{obs}} = 0.976$
40. a) $z_{\text{obs}} = 6.6406$; b) 0.0095.
41. $z_{\text{obs}} = 3.6408$.

42. $z_{\text{obs}} = -1.866$.
43. $z_{\text{obs}} = -4.045$.
44. a) 0.0668; b) 0.5557.
45. a) $z_{\text{obs}} = -0.9177$; b) 0.6814; c) 0.0861.
46. a) 0.075; b) 0.100 (exacta) 0.0105 (aproximada).
47. a) não se põe em causa o cumprimento do objectivo; valor-*p* = 0.2409; b) 0.64%.
48. $z_{\text{obs}} = -1.1992$.
49. $z_{\text{obs}} = 1.3095$.
50. $z_{\text{obs}} = -2.6348$.
51. a) $z_{\text{obs}} = 1.880$; c) $z_{\text{obs}} = 1.972$.
52. $z_{\text{obs}} = 6.479$.
48. $t_{\text{obs}} = 1.667$.
49. a) $t_{\text{obs}} = 7.738$; b) $z_{\text{obs}} = -1.481$.
56. Correlação entre *licenças* e *taxa*: $t_{\text{obs}} = -4.2442$;
    Correlação entre *licenças* e *cimento*: $t_{\text{obs}} = 1.4879$;
    Correlação entre *taxa* e *cimento*: $t_{\text{obs}} = 0.1183$.
57. a) valor-*p* = 0.0764; b) $t_{\text{obs}} = 6.4492$.
58. $z_{\text{obs}} = 5.917$.
59. b) valor-*p* = 0.4269.
60. $z_{\text{obs}} = 1.3716$.
61. a) valor-*p* = 0.6745; b) $F_{\text{obs}} = 3.1014$.
62. Operadores: $F_{\text{obs}} = 0.963$; tipos de máquinas: $F_{\text{obs}} = 0.2593$.
63. Marcas: $F_{\text{obs}} = 50.506$, valor-$p \approx 0$; Humidade: $F_{\text{obs}} = 129.216$, valor-$p \approx 0$.
64. Tipo de semente: $F_{\text{obs}} = 97$; Fertilizante: $F_{\text{obs}} = 16$.